PLANTEAMIENTO

1. El beneficio en sentido econónomico se define como la diferencia entre los ingresos que una empresa percibe y los costos en los que incurre. Un supuesto básico de análisis económico es que la empresa actúa con el fin de maximizar sus beneficios.

   Supongamos una empresa que fabrica un solo bien a partir de n inputs. Dicha empresa compra los n inputs en un mercado a los precios dados $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y, vende su producto en este mercado a un precio p_0. Se sabe que f, $f : \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbb{R}$, es la función de producción, x_0 es la cantidad a producir del bien, $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ las cantidades a emplear de los inputs y que a los precios considerados se pueden comprar y vender cantidades arbitrarias, se trata de calcular el plan de producción $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ que elegirá la empresa con objeto de maximizar sus beneficios.

   Solución

   Considerando que la función objetivo es

   $$\text{máx } B(x_0, x_1, \ldots, x_n) = p_0 x_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

   Sujeta a

   $$\begin{cases} x_0 \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ x_0 \geq 0; \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

   Consideremos las siguientes hipótesis sobre la función de producción f

   a) La función de producción es continua en $\{x \in \mathbb{R}^n / x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ y es C^2 en el conjunto $D = \{x \in \mathbb{R}^n / x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ y $f(0) = 0$.

   b) Para todo $x \in D$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) > 0,\ i = 1, \ldots, n$.

   c) La función f es estrictamente cuasicóncava en D.

   Estas hipótesis son bastante razonables para la función de producción. De hecho, se verifican para una función tipo Cobb-Douglas o una función C.E.S.[1]

   Si f es una función Cobb-Douglas o C.E.S., entonces, se tendrá $x_0 > 0$ y éste se reduce a

   $$\text{máx} \quad p_0 x_0 - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

   sujeta a

   $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_0 \geq 0$$

[1]Una función C.E.S. es una función de la forma $f(x) = k\left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i^{-\rho}\right]^{-\nu/\rho}$, $k > 0, \delta_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, $\nu > 0$ y $\rho \neq 0$ con $\rho > -1$

Como la función objetivo es cóncava ya que es lineal y, el conjunto de soluciones factibles convexo, las soluciones están determinadas por las condiciones de Kuhn-Tucker que son

$$\begin{aligned}
&p_0 - \lambda = 0 \\
&-p_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, \ldots, n \\
&\lambda \geq 0 \\
&\lambda(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - x_0) = 0 \\
&f(x_1, \ldots, x_n) - x_0 \geq 0
\end{aligned}$$

Suponiendo que existen $x^* = (x_0^*, x^*)$ y λ^* para los que se verifican las condiciones, entonces se tiene

$$f(x^*) = x_0^* \ \text{ ya que } \ \lambda^* = p_0 > 0 \tag{1}$$

y

$$\lambda^* = p_0 = \frac{p_i}{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)},\ i = 1, \ldots, n$$

de donde

$$p_i = p_0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*),\ i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

La condición (1) significa que la empresa está produciendo exactamente lo que va a vender, que es lógico si se desea maximizar el beneficio ya que, si $x_0^* < f(x^*)$, como el precio del producto p_0 es positivo, el beneficio obtenido sería inferior, pues los costos en que se incurre son los mismos, pero se deja de ingresar la cantidad $(f(x^*) - x_0^*)p_0 > 0$ al suponer que se vende todo lo que se produce.

En la condición (2) aparece la expresión

$$p_0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)$$

que representa el valor de la productividad marginal del i-ésimo input, por tanto, si lo que se desea es maximizar el beneficio debe coincidir el precio p_i del input i-ésimo para el valor de su productividad marginal para $i = 1, \ldots, n$.

Obsérvese que si

$$p_0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) > p_i$$

para algún i, un incremento en el uso del i-ésimo input implicaría un aumento en el beneficio. En efecto, supongamos que se incrementa x_i^* en $\Delta x_i > 0$, entonces, x_0^* pasa a ser

$$x_0^+ = f(x_1^*, \ldots, x_i^* + \Delta x_i, \ldots, x_n^*) \ \text{ ya que } \ x_0^* = f(x^*)$$

Teniendo en cuenat la diferenciabilidad de la función de beneficios se verifica

$$\Delta B \cong (p_0, -p_1, -p_2, \ldots, -p_n) \begin{bmatrix} x_0^+ - x_0^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = p_0(x_0^+ - x_0^*) - p_i \Delta x_i$$

y por la diferenciabilidad de f, como

$$x_0^+ - x_0^* \cong \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)\Delta x_i$$

se tiene

$$\Delta B \cong p_0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)\Delta x_i - p_i \Delta x_i = \left(p_0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) - p_i \right) \Delta x_i > 0$$

De manera análoga si $p_0 \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) < p_i$ para algún i, una pequeña reducción del empleo del input i-ésimo ($\Delta x_i < 0$) provocará un aumento de los beneficios, y, por tanto, x^* no sería óptimo.

2. Una compañía petrolífera tiene que determinar cuántos barriles de petróleo va a extraer de los pozos en los próximos años para maximizar los beneficios. Conoce que si extrae x_1 millones de barriles durante el primer año, puede vender cada barril por $(28 - x_1)$ dólares siendo el costo de extracción de x_1^2 millones de dólares. Durante el segundo año, si extrae x_2 millones de barriles el precio de venta por barril es de $(30 - x_2)$ dólares y 15 millones de dólares el costo de extracción. En el tercer año si se extraen x_3 millones de barriles, cada uno de ellos se puede vender a $(32 - x_3)$ dólares, ascendiendo en este caso a $2x_3^2$ millones de dólares los costos de extracción. La empresa, por otra parte, conoce que a lo largo de los tres años puede extraer en total 30 millones de barriles y gastar 350 millones en tareas de extracción. Supuesto que el tipo de interés anual es del 4 %, determinar la política óptima de extracción en los próximos tres años.

   Solución

   Las variables de decisión son:

   x_1=millones de barriles extraidos en el primer año

   x_2=millones de barriles extraidos en el segundo año

   x_3=millones de barriles extraidos en el tercer año y la función obejtivo será

$$\text{máx } x_1(28-x_1)+\frac{1}{1{,}04}x_2(30-x_2)+\frac{1}{1{,}04^2}x_3(32-x_3)-x_1^2-\frac{1}{1{,}04}1{,}5x_2^2-\frac{1}{1{,}04}2x_3^2$$

sujeta a

$$\begin{cases} x_1^2+1{,}5x_2^2+2x_3^2 \leq 350; \\ x_1+x_2+x_3 \leq 30; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La función objetivo es el valor presente descontado de ingresos menos costos. La unidad de medida es el millón de dólares del primer año. en la primera restricción se supone que las sumas de las cantidades monetarias gastadas en el primer, segundo y tercer año en costos de extracción no pueden superar los 350 millones de dólares. Hallamos una solución del problema mediante el comando fmincon del Matlab.

Puesto que una de las restricciones es una función no lineal, esta se debe edita como función (new function) en Matlab de la siguiente

```
function [c,ceq] = myf1(x)
c=[x(1)^2+1.5*x(2)^2+2*x(3)^2-350];
ceq=[];
end
```

Definida la restricción no lineal como una función, el problema de optimización se introduce en Matlab en la forma

```
fun=@(x)-x(1)*(28-x(1))-1/1.04*x(2)*(30-x(2))-1/(1.04)^2*x(3)*(32-x(3))
     +x(1)^2+1/1.04*1.5*x(2)^2+1/(1.04)^2*2*x(3)^2
[x fval]=fmincon(f,[0 0 0],[1 1 1],30,[],[],[0 0 0],[],@myf1)
```

Observece que la función objetivo es multiplica por -1 para maximizar, pues el comando fmincon solo haya valores que minimizan la función

La solución dada por el Matlab es de la forma:

```
Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>

x =

    7.0000    6.0000    5.3333
```

```
fval =

 -263.4339
```

Así pues, el beneficio se maximiza cuando se extraen

x_1^*= 7 millones de barriles extraidos en el primer año

x_2^*=6 millones de barriles extraidos en el segundo año

x_3^*=5. 333 millones de barriles extraidos en el tercer año

Consiguiéndose un beneficio de 263.43 millones de dólares con valor del primer año.

3. Una persona desea invertir 2000 dólares en tres activos financieros. Sea R_i la variable aleatoria que representa el rendimiento anual de un dólar invertido en el activo i para $i = 1, 2, 3$, siendo los valores esperados

$$E(R_1) = 0{,}35, \quad E(R_2) = 0{,}12, \quad E(R_3) = 0{,}22$$

y las varianzas y covarianzas, respectivamente

$$Var(R_1) = 0{,}40, \quad Var(R_2) = 0{,}10, \quad Var(R_3) = 0{,}20$$

$$Cov(R_1, R_2) = 0{,}02, \quad Cov(R_1, R_3) = 0{,}05, \quad Cov(R_2, R_3) = 0{,}22$$

se pide:

a) Determinar la cartera óptima para la que se minimiza la varianza del rendimiento anual, consiguiéndose al menos un rendimiento esperado del 20 %.

b) Sea V^* la varianza mínima obtenida en el apartado anterior. Encontrar la cartera óptima, si se quiere maximizar el rendimiento esperado, siendo la varianza del rendimiento anual de la cartera no mayor que V^*.

c) Resolver nuevamente el apartado *a*) suponiendo que el valor esperado de R_2 es $E(R_2) = 0{,}06$. Comparar la solución con el obtenido en *a*).

Solución

a) Si se denota por x_1, x_2 y x_3 los dólares a invertir en los activos financieros 1, 2 y 3 respectivamente y por R la variable aleatoria que representa el rendimiento anual de la cartera se tiene que:

$$R = x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3$$

y, por tanto, su valor esperado y varianza son:

$$\begin{aligned}
E(R) &= x_1E(R_1) + x_2E(R_2) + x_3E(R_3) \\
&= 0{,}35x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}22x_3 \\
Var(R) &= x_1^2Var(R_1) + x_2^2Var(R_2) + x_3^2Var(R_3) + \\
&\qquad 2x_1x_2Cov(R_1, R_2) + 2x_1x_3Cov(R_1, R_3) + 2x_2x_3Cov(R_2, R_3) \\
&= 0{,}40x_1^2 + 0{,}10x_2^2 + 0{,}20x_3^2 + 0{,}04x_1x_2 + 0{,}10x_1x_3 + 0{,}14x_2x_3
\end{aligned}$$

Así pues la función obejetivo es:

$$\text{mín } Var(R) = 0{,}40x_1^2 + 0{,}10x_2^2 + 0{,}20x_3^2 + 0{,}04x_1x_2 + 0{,}10x_1x_3 + 0{,}14x_2x_3$$

Sujeta a

$$\begin{cases} 0{,}35x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}22x_3 \geq 400; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2000; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

donde la función objetivo es la varianza de R, la primera restricción que el rendimiento esperado debe ser al menos el 20 % de los 2000 dólares que se invierten, es decir, 400 y la segunda restricción refleja la cantidad total a invertir en los tres activos financieros.

Utilizando el Matlab introducimos el problema de la forma

```
fun=@(x)0.4*x(1)^2+0.1*x(2)^2+0.2*x(3)^2+0.04*x(1)*x(2)+0.1*x(1)*x(3)+0.14*x(2)*x(3)
[x fval]=fmincon(fun,[0 0 0],[-0.35 -0.12 -0.22],-400,[1 1 1],2000,[0 0 0],[])
```

Obteniendose la solución óptima

```
Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>

x =

   1.0e+03 *

    0.4996    1.0495    0.4509


fval =

   3.6040e+05
```

Así pues las cantidades óptimas a invertir en los tres activos financieros son:
x_1^*=499.6 dólares
x_2^*=1049.5 dólares
x_3^*=450.9 dólares
obteniendo en este caso la varianza mínima V^*=360400.

b) Si se desea maximizar el rendimiento esperado cuando la varianza del rendimiento anual no debe superar la cantidad V^*=360400, el problema que se ha de resolver es

$$\text{máx } 0{,}35x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}22x_3$$

Sujeta a

$$\begin{cases} 0{,}40x_1^2 + 0{,}10x_2^2 + 0{,}20x_3^2 + 0{,}04x_1x_2 + 0{,}10x_1x_3 + 0{,}14x_2x_3 \leq 360400; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2000; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Puesto que se tienen restricciones lineales se debe definir como una función con el comando New function de Matlab de la forma

```
function [c,ceq] = myf1(x)
c=[0.4*x(1)^2+0.1*x(2)^2+0.2*x(3)^2+0.04*x(1)*x(2)+0.1*x(1)*x(3)+0.14*x(2)*x(3)-360400];
ceq=[];
end
```

Definida la restricción no lineal resolvemos el problema en Matlab de la forma

```
fun=@(x)-0.35*x(1)-0.12*x(2)-0.22*x(3)
[x fval]=fmincon(fun,[0 0 0],[],[],[1 1 1],2000,[0 0 0],[],@myf1)
```

cuya solución es

```
Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>

x =

   1.0e+03 *

    0.4996    1.0495    0.4509


fval =

 -400.0002
```

que coincide con la del apartado anterior.

c) Teniendo en cuenta el nuevo valor de $E(R_2) = 0{,}06$, el problema del apartado a) queda de la forma

$$\text{mín } Var(R) = 0{,}40x_1^2 + 0{,}10x_2^2 + 0{,}20x_3^2 + 0{,}04x_1x_2 + 0{,}10x_1x_3 + 0{,}14x_2x_3$$

Sujeta a

$$\begin{cases} 0{,}35x_1 + 0{,}06x_2 + 0{,}22x_3 \geq 400; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2000; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

En Matlab

```
fun=@(x)0.4*x(1)^2+0.1*x(2)^2+0.2*x(3)^2+0.04*x(1)*x(2)+0.1*x(1)*x(3)+0.14*x(2)*x(3)
[x fval]=fmincon(fun,[0 0 0],[-0.35 -0.06 -0.22],-400,[1 1 1],2000,[0 0 0],[])
```

Su solución queda

```
Local minimum found that satisfies the constraints.

Optimization completed because the objective function is non-decreasing in
feasible directions, to within the value of the optimality tolerance,
and constraints are satisfied to within the value of the constraint tolerance.

<stopping criteria details>

x =

  590.7242  729.9634  679.3124


fval =

   4.1196e+05
```

Por tanto, al disminuir el valor esperado del rendimiento del segundo activo financiero, que es el de menor varianza, para que la cartera en su conjunto se mantenga en la rentabilidad esperada, se ha de invertir 729.9636 dólares en el segundo activo financiero en lugar de los 1049.5 dólares que se obtuvieron en la situación anterior. estos conlleva también un aumento de la inversión en los activos financieros 1 y 3 que al tener mayor varianza dan lugar a un incremento en la varainza mínima $V^* = 411960$.

Bibliografía

- Avriel, M.: *Nonlinear Programming. Analysis and methods*, Prentice-Hall, Inc., 1976.
- Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M.: *Nonlinear Programming, theory and algorithms*, 2.^{a} edición, J. Wiley, 1993.
- Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., Sherali, H.D.: *Linear Programming and networks flows*, 2.^{a} edición, J. Wiley, 1990.
- Dhrymes, T.J.: *Mathematics for Econometrics*, Springer-Verlag, 1978.
- Mangasarian, O.L.: *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Book Company, 1969.